

Leitideen des Raumgeometrieunterrichtes

Über fundamentale Ideen unseres Raumgeometrieunterrichtes

Thomas Müller, Manfred Blümel, Karin Vilsecker

Hinweis: Sämtliche Abbildungen, ausgenommen Abb. 7, sind dem neubearbeiteten Schulbuch *Geometrische Bilder* [BLÜMEL, MÜLLER, VILSECKER 2012] entnommen.

Welche fundamentalen Ideen im Sinne einer umfassenden Bildung für ein Individuum und für die Gemeinschaft sollen im Raumgeometrieunterricht weitergegeben werden? Hin und wieder sollten wir uns die Sinnhaftigkeit dessen, was wir im Unterricht fachlich vermitteln, vor Augen führen.

Was sind Leitideen?

Wir beziehen uns hauptsächlich auf das grundlegende Werk von Hans Werner Heymann aus dem Jahr 1996 – es hat vom Titel „Allgemeinbildung und Mathematik“ [HEYMANN 1996] her nichts an Aktualität eingebüßt. Heymann wirft u.a. die Frage auf, durch welche Ideen sich den Schülerinnen und Schülern die besondere Universalität der Mathematik verdeutlichen ließe. Ausgehend davon sollen im vorliegenden Artikel Gedanken erörtert werden, welche die grundlegenden Ideen unseres Raumgeometrieunterrichtes sind.

Heymann beruft sich in seinen Ausführungen auf Alfred Whitehead¹. Whitehead schrieb schon im Jahr 1913 von dem Problem, „dass die Mathematik durch die Art, wie sie von Fachleuten betrieben wird, Gefahr laufe, sich von der übrigen Kultur zu isolieren, und dass aus diesem Grunde der allgemeinbildende Mathematikunterricht andere Schwerpunkte setzen müsse ... der Mathematikunterricht müsse sich auf unmittelbare und einfache Weise mit einigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befassen“.

Davon ausgehend schlägt Heymann vor, die Universalität der Mathematik für die Gesamtkultur anhand zentraler Ideen exemplarisch erfahrbar zu machen. Er zitiert den englisch-australischen Mathematikdidaktiker Alan Bishop¹. Dieser beschreibt sechs Schlüsselaktivitäten, die sich in irgendeiner Form in allen von ihm untersuchten Kulturen auffinden lassen und deshalb seiner Einschätzung nach als kulturelle „Universalien“ gelten können: Zählen („counting“), räumliche Beziehungen herstellen („locating“), Messen („measuring“), Entwerfen („designing“), Spielen („playing“) und Begründen („explaining“).

Heymann fordert, dass keine der Ideen ausschließlich einen bestimmten mathematischen Stoff repräsentieren soll. Jede Idee soll auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus verdeutlichbar sein und das mathematische Curriculum vom Elementarunterricht bis zur höheren Mathematik durchziehen

können. Diese Eigenschaft erinnert an das Spiralprinzip von Jerome Seymour Bruner², wonach jedem Kind auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lerngegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form nahe gebracht werden könne. Schließlich sollen sich die Ideen beliebig weit vertiefen lassen.

Die zentralen Ideen für den Mathematikunterricht sind nach Heymann:

Die Idee der Zahl, die Idee des Messens, die Idee des räumlichen Strukturierens, die Idee des funktionalen Zusammenhangs, die Idee des Algorithmus und die Idee des mathematischen Modellierens.

Bevor wir nun auf die unserem Raumgeometrieunterricht zugrunde liegenden zentralen Ideen kommen, soll noch festgehalten werden: Ideen sind keine Kompetenzen, denn diese beziehen sich ja auf die Fertigkeiten / Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler – auch kein Mittelding zwischen Inhalts- und Handlungskompetenzen. Ideen sind auch keine Bildungsziele und kein Lehrstoff im Sinne des Lehrplammentextes.

Ideen als rote Fäden

Wir verstehen unter Leitideen im Sinne des obigen historischen Exkurses **Einfälle** – „Ideen“ eben, die im Laufe der Zeit entstanden sind, die sich als nützlich erwiesen haben und einen Erkenntnisfortschritt für den Einzelnen und für unsere Gesellschaft bewirkt haben, bewirken oder bewirken können. Jemand muss beispielsweise einmal die Idee gehabt haben, eine Skizze auf einem Blatt Papier dazu zu verwenden, um etwas Räumliches zu beschreiben. Und nun ist es selbstverständlich, dass wir über das Aussehen räumlicher Objekte mittels zweidimensionaler Aufzeichnungen kommunizieren. Nicht nur reale Raumsituationen können dargestellt sein, sondern sogar etwas, das (noch) nicht real existiert. Auch Wunschvorstellungen können anderen bis in kleinste Details bildhaft mitgeteilt werden [MÜLLER 2011].

¹ Biographisches findet man etwa auf <http://www.education.monash.edu.au/profiles/abishop> [2011-11-15]

² Biographisches findet man etwa auf http://en.wikipedia.org/wiki/Jerome_Bruner [2011-11-15]

Zeichne den Schatten der Buchstaben bei Sonneneinstrahlung.

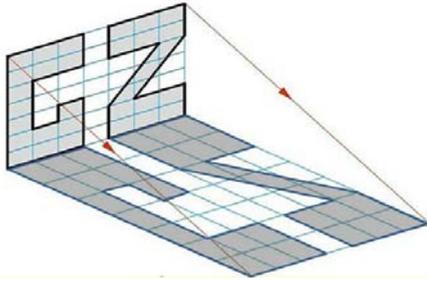


Abbildung 3: Parallelprojektion

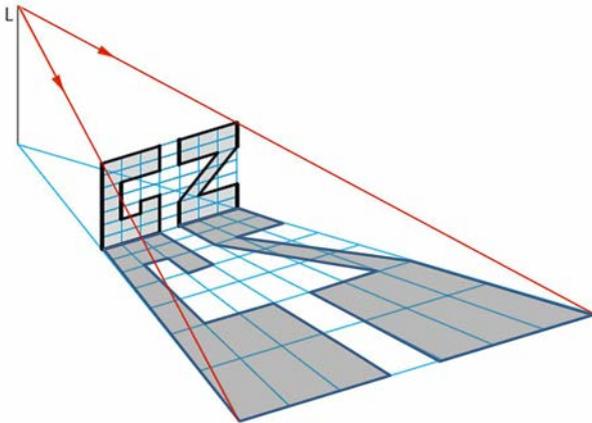


Abbildung 4: Zentralprojektion

Idee der Koordinatisierung – der Raum wird berechenbar

Man kann jedem Raumpunkt und damit jedem Raumobjekt Zahlen zuordnen. Damit wird der Raum berechenbar, die Umwelt mathematisch fassbar.

Ein Anwendungsbeispiel, bei dem die Idee der Koordinatisierung deutlich wird, ist folgendes: um die Hauptschieber für Gas oder Wasser auch im Winter bei schneebedecktem Boden auffindbar zu machen, sind an vielen Hauswänden oder Gartenmauern kleine Tafeln angebracht, die die Koordinatenwege zu den Anschlüssen beschreiben (siehe Abbildung 5).

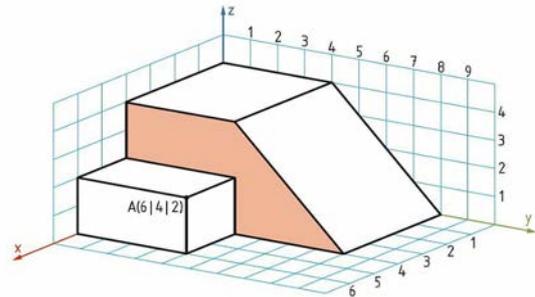


Abbildung 5: Koordinatenweg zum Gasabsperrhahn

Für den Elementarunterricht in GZ haben wir die Leitidee Koordinatisierung beispielsweise in der unten stehenden Übung (vgl. Abbildung 6) umgesetzt. Bei dieser Aufgabenstellung müssen Koordinaten gelesen und anschließend die Raumsituation im Bild richtig interpretiert werden. Eckpunkte des Körpers sollen an ihren Koordinaten erkannt und im Bild eingezeichnet werden. Der Lernprozess verläuft in der Reihenfolge: Das „Lesen“ von Koordinaten aus einer zweidimensionalen Darstellung wird zunächst im Unterricht erlernt und trainiert. Anschließend wird dann die durch Koordinaten gegebene räumliche Situation ins Bild übertragen.

U17

In der Zeichnung ist der Punkt A eingetragen. In der Tabelle sind Koordinaten weiterer Punkte angegeben. Sind diese Punkte Eckpunkte des Körpers? Wenn ja, beschrifte sie in der Zeichnung.



A(6 4 2)	B(4 4 2)	C(3 3 0)	D(4 8 0)	E(0 7 4)	F(0 4 4)
ja					

Abbildung 6: Vertrautwerden mit Raumkoordinaten

Der geläufige Umgang mit räumlichen Koordinaten ist für das Arbeiten mit CAD-Programmen von grundlegender Bedeutung.

Wichtig für den Unterricht erscheint uns ferner, den Bezug zur Praxis immer wieder herzustellen. So ist z. B. der Umgang mit Navigationsgeräten heutzutage für viele Kinder bereits eine Selbstverständlichkeit. Der GZ/DG-Unterricht bietet eine günstige Gelegenheit, den Schülerinnen und Schülern bewusst zu machen, dass diese Technologie auf der Idee der Koordinatisierung basiert.

Idee der Abstraktion – der geometrische Formenschatz

Schon kleine Kinder bauen mit einfachen Bausteinen - aus „Grundkörpern“ - reale Objekte (Häuser, Fahrzeuge, Möbel, ...) phantasie reich nach. Sie „modellieren“. Verstärkt wird diese Verknüpfung der Kinderwelt mit der realen Welt durch kindgerechte Zeichnungen in Bilderbüchern. So kann sich ein einfacher Formenschatz entwickeln, der nach und nach erweitert wird.

Auch im Raumgeometrieunterricht führen wird die realen Objekte in der Welt auf einfache Grundkörper (Kegel, Würfel, Prisma,...) zurück und ent-

wickeln so den geometrischen abstrakten „Formenschatz“.

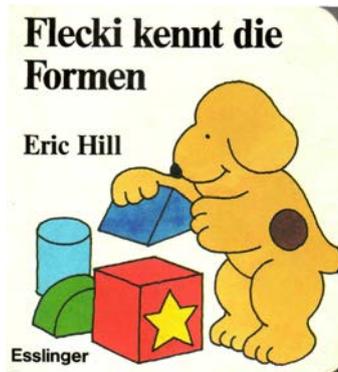


Abbildung 7: Bilderbuch für Kinder

Dass diese mentale Brücke zwischen realen Objekten und abstrakten Grundkörpern zweiseitig wirken kann, wird beim Objekt „Vienna International Center“ (entworfen von Architekt Johann Staber, erbaut zwischen 1973 und 1979) – im Volksmund „UNO-City“ genannt - deutlich: Bekanntermaßen war ein „Puck“ – das „Mittelding“ einer früheren Schallplatte - der Anstoß, das Gebäude in dieser Form zu modellieren: Vom realen Objekt Puck über die Abstrahierung (Zylinderformen) wieder zum realen Objekt.



Abbildung 8: Vienna International Center

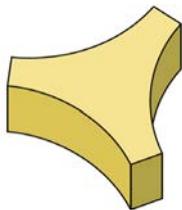


Abbildung 9: Abstrahierung

Die Idee der Abstraktion steht im Prinzip auch hinter der Computertomografie, bei der ein Teil des menschlichen Körpers digitalisiert wird. D.h. es werden Zahlenwerte für gedachte Voxel³ zugeordnet, die der Dichte dieser Elementarkörper entsprechen. Und so kann auch von einem komplexen Objekt wie einem Menschen ein Modell aus abstrakten Grundkörpern (z.B. kleinen Würfeln) aufgebaut werden.

Idee der Dynamik – neue Formen entstehen aus Bewegung

Diese Leitidee kann in unterschiedlicher Weise von geometrischer Bedeutung sein:

Ein Objekt kann bewegt werden. Beim Modellieren mit einem CAD-Programm sind vor allem die grundlegenden Bewegungsvorgänge Schiebung und Drehung wichtig. Damit kann ein Grundkörper in die richtige Lage gebracht werden. Zur genauen Beschreibung der Lage bzw. des Bewegungsvorgangs werden im allgemeinen Koordinaten verwendet.

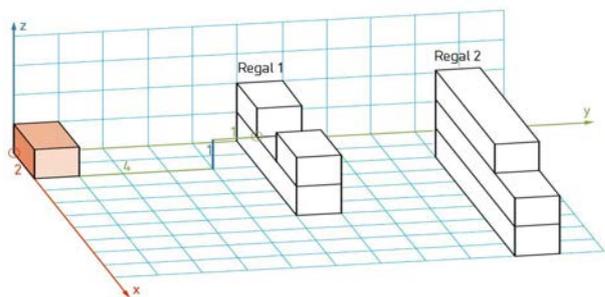


Abbildung 10: Raumtransformation

Genauere Untersuchungen von Bewegungsvorgängen lassen sich mit dynamischer Geometrie-Software durchführen. Die Erzeugung vieler Kurven (z. B. Ellipsen) kann damit gut nachvollzogen werden.

Interessant ist es, wenn nicht das Objekt, sondern der Betrachter seinen Standpunkt wechselt, sich also bewegt.



Abbildung 11: Impossible in Dinkelsbühl / DE

Wird beim Modellieren mit CAD ein Grundkörper nicht nur bewegt, sondern gleichzeitig auch kopiert, entsteht ein neues Objekt. Auch die Grundkörper selbst – wie in Abb. 12 z.B. ein Prisma

³ „Voxel“ (volume element) als 3D-Analogon zum ebenen „Pixel“ (picture element)

– kann man sich durch Bewegung eines Grundelements entstanden denken.

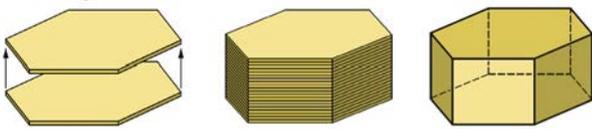


Abbildung 12: Bewegungsvorgang, Fliesenstapel, Prisma

Leitideen und die NMS Neue Mittelschule (NMS)

Das Konzept der Leitideen ist aktuell wie nie zuvor. Es entspricht der Pädagogik wie sie in der NMS (Neuen Mittelschule) verstanden wird. Die NMS sieht die Heterogenität der Schülerinnen und Schüler als Chance. Um dabei den unterschiedlichen Anspruchsniveaus der Lernenden gerecht zu werden, stellt die innere Differenzierung ein wesentliches Kriterium für einen erfolgreichen Unterricht dar (vgl. bm:ukk, 2011). Jede Lehrperson weiß, wie schwierig es ist, diesem Anspruch gerecht zu werden. Genau dabei können Leitideen einen entscheidenden Beitrag leisten. Sie lassen sich bereits im Elementarunterricht thematisieren und helfen so bei der Auswahl der wesentlichen Inhalte – der Lerninhalte, die allen Kindern nahegebracht bzw. zugänglich gemacht werden müssen.

Weiters sei darauf verwiesen, dass seit dem Schuljahr 2008/09 eine Lehrplanverordnung (BG Nr. 137 vom 30. April 2008) für Allgemeine Sonderschulen (ASO), welche den Unterrichtsgegenstand Geometrisches Zeichnen (GZ) auch für Schülerinnen mit SPF (sonderpädagogischem Förderbedarf) vorsieht, wirksam ist. In [VILSECKER, GEMS 2011] wurden Möglichkeiten aufgezeigt, wie zentrale Ideen im GZ-Unterricht auch für Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf bzw. lernschwachen Schülerinnen und Schülern umgesetzt werden können.

Leitideen sind „Ideen“, die praxisrelevant sind und dadurch die Schülerinnen und Schüler besonders ansprechen. Nachhaltigkeit, Anschlussfähigkeit und Lebensbezug sind wesentliche Forderungen, die im Zusammenhang mit der NMS besonders häufig genannt werden. Wenn Schülerinnen und Schüler nicht nur verschiedene Übungsbeispiele zu einer Thematik bearbeiten, sondern auch die

zentrale Idee dahinter kennen und verstehen, so ist davon auszugehen, dass damit eine bessere Verknüpfung der Lerninhalte mit dem Vorwissen sowie eine positive Motivation der Lernenden bewirkt wird.

Literatur:

- Bishop, A. J.: *Mathematical values in the teaching process*. In A. J. Bishop et al. (eds.) *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 195-214). Dordrecht: Kluwer, 1991
- Blümel, Manfred; Müller, Thomas; Vilsecker, Karin: *Geometrische Bilder – Skizzieren, Konstruieren, Modellieren*, ÖBV Wien, 2012
- Blümel, Manfred; Müller, Thomas; Vilsecker, Karin: *Geometrische Bilder Arbeitsheft – Skizzieren, Konstruieren, Modellieren*, ÖBV Wien, 2012
- Fischer, Roland / Greiner, Ulrike / ua.: „Fächerkanon“ (Arbeitstitel) – *Ergebnisse der Diskussion der Arbeitsgruppen*, Trauner Linz, 2012
- Heymann, Hans Werner: *Allgemeinbildung und Mathematik*, Beltz Verlag – Weinheim und Basel, 1996
- Müller, Thomas: *Der Raumgeometrieunterricht und seine Rolle im Fächerkanon, Teil 3: Kommunikation und Erkenntnisgewinn*, Informationsblätter für Darstellende Geometrie, Jahrgang 30, Heft 2/2011, Innsbruck
- Müller, Thomas: *Verstärkt konstruieren - neben dem Modellieren! Geometrieunterricht mit einem dynamischen 3D-Programm - Möglichkeiten und Impulse*, IBDG (Informationsblätter der Geometrie) Jahrgang 24, Heft 1/2005, Innsbruck, S. 11 – 22.
- Stachel, Hellmuth: *Wozu Geometrie? Vortrag bei der Ehrenpromotion an der TU Dresden, 2010* <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel/WozuGeometrie.pdf> [20101214]
- Vilsecker, Karin; GEMS Werner: *Geometrisches Zeichnen in der ASO und Integration („GZ für lernschwache Schüler/innen“)*, IBDG (Informationsblätter der Geometrie) Jahrgang 30, Heft 1/2011, Innsbruck, S. 11-12.
- Links:**
- Best Visual Illusion of the Year Contest 2010: Kokichi Sugihara*
<http://illusioncontest.neuralcorrelate.com/>
- Hans Werner Heymann: <http://www.uni-siegen.de/fb2/heyman/publikationen.html?lang=de>
- bm:ukk Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur, 2011: *Die Neue Mittelschule Qualität im Lehren und Lernen*
http://www.neuemittelschule.at/fileadmin/user_upload/pdfs/flyer2011.pdf